AZ ISMERETLEN ISMERŐS

Algebrai geometriáról – nem algebrai geométereknek

Kovács Sándor

A magyar matematikai életben az algebrai geometria egyedi helyet foglal el. Szinte mindenki tud a létezéséről, de kevesen ismerik behatóan, – amolyan ismeretlen ismerősként él közöttünk. Az utóbbi években az érdeklődés megnőtt iránta, bár a magyar nyelvű irodalom továbbra is igen minimális. [Kollár80] az algebrai görbék elméletéről írt kitűnő munka, azok számára, akik komolyabban érdeklődnek a téma iránt, feltétlenül ajánlott. [Rónyai95] az algebrai geometriának a Fermat-sejtés bizonyításában játszott szerepét mutatja be. [Szamuely96] az algebrai geometria egyik legfontosabb alaperedményéről, a Riemann-Roch tételről szóló igen részletes írás.

Lássuk mi is az az algebrai geometria valójában. [Kempf93] bevezetésként így ír róla:

> „Az algebrai geometria két mediterrán kultúrából származó ötletek keveréke. A pozició és forma görög művészete az arab tudomány egyenletek megoldására kifejlesztett számitásainak köntösébe bújtatva. ... Az algebrai geometria a geometriailag hihető és az algebrailag lehetséges közötti finom egyensúlyt tanulmányozza. ... ”

Ezt a jelenséget szépen mutatja be Bezout tétele. Ez utóbbi azt állítja, hogy a komplex projektív síkon egy m-edfokú és egy n-edfokú görbének – megfelelő multiplicitással számolva – mn metszéspontja van. Néhány példa megvizsgálása után ez az állítás nyilvánvalónak tűnik, de a precíz bizonyitás komoly előkészületeket igényel.

A legfőbb problémát az jelenti, hogy nem teljesen világos, hogy mit kell érteni a „megfelelő multiplicitás” kitételen. Elvárható, hogy ez a „multiplicitás” tükrözze a metszéspont multiplicitását az egyes görbéken, azaz, hogy ha például a metszéspont az egyik görbének p-szeres, a másiknak q-szoros pontja, akkor ez a „multiplicitás” legalább pq legyen. Ugyanakkor azt is elvárjuk, hogy például egy kört érintő egyenes és a kör metszéspontját kétszeres multiplicitással számoljuk. Ezeket figyelembe véve láthatjuk, hogy már az egy nehéz feladat, hogy ezt a bizonyos „multiplicitást” definiáljuk.

A „multiplicitást” klasszikusan a görbék perturbációjával szokás definiálni, azaz megmutatva, hogy létezik olyan perturbáció, amely a görbéket úgy mozgatja el, hogy a metszéspontok egyszeresekké válnak, így a kérdéses „multiplicitás” ezen egyszeres metszéspontok száma. Ekkor még hátra van annak bizonyítása, hogy az így adódó szám egyértelmű. Ez elég fáradtságos és Bezout tétele messze nem nyilvánvaló.

A probléma algebrai megoldása a helyes „multiplicitást” egy megfelelően választott vektortér dimenziójaként adja meg. Ezek után a munka nagy része abban rejlik, hogy belássuk, hogy ez az absztrakt módon definiált „multiplicitás” valóban megfelel azoknak az követelményeknek, amelyeket jogosan elvárunk. Valójában még ennél is több igaz. Bizonyítható, hogy csupán egyetlen értelmes definíció adható, azaz speciálisan ez a definíció megegyezik a perturbációk segítségével kapottal. Az algebrai definíciót követve azonban Bezout tétele már könnyen adódik.

Az algebrai geometria – az eddigieknél kicsit pontosabban, bár kevésbé költőien fogalmazva – polinomokkal definiálható alakzatokkal foglalkozik. Tárgya geometria, eszközei algebraiak. Mindenki számára ismerős példa a kúpszelet, vagyis egy másodfokú síkgörbe, azaz a sík azon pontjainak halmaza, melyek koordinátái kielégítenek egy adott kétváltozós másodfokú polinomot. A kúpszeletek osztályozása egy elemi példát szolgáltat az algebra szerepére egy geometriai kérdés megoldásában.

Az érdeklődő [Kollár80] bevezetőjében talál egy rövid történeti áttekintést, amelyből – az olvasó kényelme kedvéért – idézek egy részt:

„ ... Az algebrai görbe egy $f(x, y) = 0$ polinommal definiált síkgörbe. Ezek vizsgálata a XVII. században kezdődött. Ekkor azonban még nem beszélhetünk az elmélet kialakulásáról. Az első komoly eredményeket a XIX. század hozta, az analízisből indulva. Algebrai függvényeket szerettek volna integrálni. A többértékűséget kiküszöbölendő a függvényt a komplex sík helyett a függvény Riemann felületén értelmezték, ami egy algebrai görbe volt. Így Abel, Jacobi, Riemann és Weierstrass az analitikus elmélet megalapozói. A század vége felé a geometria került előtérbe, a nagy geométerek Clebsch, Brill, Max Noether működése nyomán, akik a síkgörbék elméletét lényegében lezárt fejezetté tették.

Századunk elején a felületek vizsgálata folyt a legintenzívebben. Itt elsősorban a nagy olasz geométerek Castelnuovo, Enriques és Severi nevét kell megemlíteni.

A tárgykör átalakítását, nagyon nagy mennyiségű kommutatív algebra alkalmazásával Zariski és Weil végezték el a negyvenes években. Ezzel egyrészt precíz bizonyításokkal helyettesítették elődeik geometriai heurisztikáját, másrészt nagyon komoly új eredményeket értek el. A fogalmak még messzebb menő általánosítása, és számos új technikai eszköz bevezetése fűződik Grothendieck nevéhez. Azóta ezen fegyvertár alkalmazásaira helyezik a fő hangsúlyt, és számos régi problémát sikerült megoldani. A témakör jelenlegi legkiválóbb művelői közül talán Kodaira, Serre, Hironaka, Mumford, Bombieri és Deligne nevét érdemes leginkább megemlíteni. ... "

Ezután a 70-es, 80-as évek története röviden a következő: a 60-as évek végére a modern alapokat lefektették, majd a görbék és felületek elméletét az új módszerekkel újra kidolgozták. A felületek osztályozásában az ún. minimális modellek kaptak központi szerepet. A 3-dimenziós sokaságok rendszerezése azonban ekkor még átláthatatlanul bonyolult feladatnak tűnt, és hamar világossá vált, hogy a felületekével teljesen analóg minimális modell elmélet nem létezik. 1972-ben Iitaka vetett fel néhány merész sejtést magasabb dimenziós sokaságokról. Az Iitaka által javasolt utat követve Ueno bizonyította az első struktúratételt 3-dimenziós sokaságokról 1977-ben.

A nagy áttörést 1980 hozta meg. Mori új ötletek bevezetésével megtette az első lépéseket egy – a felületekéhez hasonló – minimális modell elmélet kifejlesztése felé. Ugyanebben az időben Reid definiálta a minimális modelleket, és feltételezve létezésüket, azok számos hasznos alkalmazására hívta fel a figyelmet.

A 80-as évek végére a 3-dimenziós sokaságok minimális modell elméletét teljes mértékben kidolgozták. A legjelentősebb eredmények Kawamata, Kollár, Miyaoka, Mori, Reid és Shokurov nevéhez fűződnek.

Ezen írás célja a görbék, felületek és 3-dimenziós sokaságok osztályozásának vázlatos ismertetése. Így tehát a cím valamelyest félrevezető, azaz nem az algebrai geometria egészéről lesz szó, hanem (csak) osztályozási eredményekről. Az algebrai geometria (egyik) alapproblémája az algebrai varietások osztályozása, tehát ez a megszoritás azért széles teret hagy az elmélyedésre.

Végül, mielött a lényegre térnénk, egy mentegetődzés: algebrai geometriáról nehéz közérthetően írni, mert rengeteg definíció szükséges a korrekt tárgyaláshoz. Így a követhetőség kedvéért a pontos definíciók helyett számos helyen csak közelítő fogalmat próbálok adni arról, amire szükségünk van. Ebben az esetben a kulcsszó melletti * mutatja, hogy a függelékben további információ található az adott fogalomról, de ez sem éri el feltétlenül az általában megkövetelt szigort. Az elsődleges cél azonban nem szigorú bevezetést adni, hanem bepillantást nyújtani a lehető legszélesebb olvasóközönség számára.

A cikk néhány feladatot is tartalmaz, amelyek megoldásához a Függelékben útmutatást talál az olvasó.

Köszönetnyilvánitás. Szeretném megköszönni Badics Tamásnak, Erdős Lászlónak, Kollár Jánosnak, Kovács Annamáriának, Mayer Richárdnak, Pálfy Péter Pálnak, Rónyai Lajosnak, Szabó Tibornak, Szenes Andrásnak és Tihanyi Tímeának hasznos észrevételeiket, javaslataikat és tanácsaikat. Sok hibától óvtak meg és az írás színvonala lényegesen javult segitségük eredményeképpen.

1.§ Alapok

Polinomokkal definiált alakzatokkal foglalkozunk. Ha ezt egy nem algebrailag zárt test felett tesszük, akkor bizonyos jelenségeket nem tudunk kielégítően megmagyarázni, és a sokfelé ágazó esetek kezelése rendkívül nehézkes. Természetes tehát a komplex számok teste felett dolgozni. Ez részint megkönnyíti a dolgunkat, de sokkal fontosabb, hogy egyes állítások nem is teljesülnének, ha nem algebrailag zárt test felett tekintenénk őket.

Egy másik fontos észrevétel, hogy néha látszólagos különbségeket fedezünk fel, amikor valójában csak figyelmen kívül hagytuk az alakzatok viselkedését a végtelenben. Az eredmények gyakran egyszerűbbek, ha projektív geometriában mondjuk ki őket. Erre egy ismert példa a kúpszeletek osztályozása. Míg hagyományosan 3 affin, nem elfajuló kúpszeletről tanulunk (ellipszis, hiperbola, parabola), azok projektív geometriai szempontból csupán abban különböznek, hogy az ideális egyenest hány pontban metszik. Itt érdemes megemlíteni, hogy az ellipszis és a hiperbola már affin ekvivalensek is, ha a komplex test felett dolgozunk.

1.1 Definíció. Az *n-dimenziós komplex projektív tér,* $\mathbb{CP}^n$, a komplex számokból alkotott rendezett $(n+1)$-esek halmaza, kivéve a $(0,\dots,0)$-t, ahol két rendezett $(n+1)$-est azonosítunk, ha egymás skalárszorosai, azaz $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/\sim$, ahol minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$-ra

$$(x_0,\dots,x_n) \sim (\lambda x_0,\dots,\lambda x_n).$$

Az $(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ pontot tartalmazó ekvivalencia osztályt $(x_0 : \dots : x_n)$ fogja jelölni.

Legyen most $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{CP}^n \mid x_i \neq 0\}$. Könnyen látható, hogy a

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{CP}^n \\ (y_1,\dots,y_n) &\longmapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \end{aligned}$$

leképezés* egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $\mathbb{C}^n$ és U_i között. Így az is látható, hogy $\mathbb{CP}^n$ egy n-dimenziós komplex sokaság.

Következő lépésként szeretnénk polinomok zérushelyeit definiálni. Ehhez elsősorban le kell szűkíteni a megengedett polinomok halmazát, hiszen egy tetszőleges polinom esetleg eltűnik egy adott $(x_0,\dots,x_n)$ helyen, de annak λ-szorosán nem, így a polinom $\mathbb{C}^n$-beli zérushelye nem feltétlenül áll teljes ekvivalenciaosztályok egyesítéséből. Ha azonban homogén* polinomokat tekintünk, akkor azokra

$$f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) = \lambda^{\deg f} f(x_0,\dots,x_n),$$

tehát van értelme arról beszélni, hogy egy homogén polinom a $\mathbb{CP}^n$ mely pontjaiban tűnik el.

1.2 Definíció. A $\mathbb{CP}^n$ egy V részhalmazát *projektív algebrai halmaz*nak nevezzük, ha léteznek olyan $f_1, \ldots, f_k$ homogén polinomok, hogy

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{CP}^n \mid f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Algebrai halmazok közötti *izomorfizmus** annyit jelent – ahogy az izomorfizmus általában –, hogy a rendelkezésünkre álló eszközökkel nem tudunk különbséget tenni az adott algebrai halmazok között. Nem egészen pontosan, de szemléletesebben fogalmazva két varietás izomorf, ha van köztük mindkét irányban egy-egy leképezés, amelyek lokálisan polinomokkal reprezentálhatóak és ezek egymásutánja a megfelelő varietás identitását adja.

1.2.1 Megjegyzés. Érdekes megjegyezni, hogy Chow egy tétele szerint minden kompakt komplex sokaság, amely beágyazható a komplex projektív térbe algebrai, azaz kielégíti a fenti definíciót. Ez azt jelenti, hogy valójában nem veszítünk nagyon sok információt azzal, hogy algebrai varietásokra szoritkozunk.

A definícióból könnyen látszik, hogy projektív algebrai halmazok metszete és véges egyesítése is projektív. Két projektív algebrai halmaz különbsége általában nem projektív, ezeket *kváziprojektív*nak hívjuk.

Egy fontos speciális eset a következő: legyen V egy projektív algebrai halmaz, és tekintsük $V \cap U_i$-t. Ez izomorf a $\phi_i^{-1}(V) \subseteq \mathbb{C}^n$ halmazzal, továbbá, ha $f_1, \ldots, f_k$ a V-t definiáló polinomok, akkor $\phi_i^{-1}(V)$ éppen az $f_j(y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n)$ $j = 1, \ldots, k$ polinomok közös zérushelye. A $\mathbb{C}^n$ ilyen részhalmazait *affin algebrai halmaz*oknak nevezzük. A projektív algebrai halmazokat ezek szerint tekinthetjük úgy, mintha affin részekből lennének összeragasztva.

Ha U kváziprojektív, X projektív és $U \subset X$, akkor $\overline{U}$ jelöli a legkisebb projektív algebrai halmazt, amely tartalmazza U-t, azaz

$$\overline{U} = \bigcap_{\substack{Z \text{ projektív} \\ Z \subset X}} Z.$$

Érdekes megjegyezni, hogy $\overline{U}$ megegyezik az U lezártjával az Euklideszi topológiában.

Egy projektív algebrai halmaz *irreducibilis,* ha nem áll elő két valódi projektív algebrai részhalmaza egyesítéseként. Az U kváziprojektív algebrai halmaz *irreducibilis,* ha $\overline{U}$ irreducibilis. Az irreducibilis algebrai halmazokat *varietás*oknak nevezzük. Ha egy varietás 1-dimenziós,* akkor *görbé*nek, ha 2-dimenziós, akkor *felület*nek hívjuk.

1.3 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha X irreducibilis és $Z \subset X$ egy projektív algebrai részhalmaz, akkor $X \setminus Z$ is irreducibilis.

1.4 Definíció. A $\mathbb{CP}^n$-ben egy $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ d-edfokú egyenlettel definiált algebrai halmazt *d-edfokú hiperfelület*nek hívunk. Egy elsőfokú hiperfelületet *hipersík*nak nevezünk. Így tehát az

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

egyenlet, ahol nem mindegyik $a_i = 0$, egy hipersíkot definiál $\mathbb{CP}^n$-ben. Minden hipersík izomorf $\mathbb{CP}^{n-1}$-gyel.

1.5 Definíció. Az

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

egyenlet egy másodfokú görbét, azaz egy *kúpszelet*et definiál $\mathbb{CP}^2$-en.

1.6 Példa. Az

$$y^2 z = x(x^2 + z^2)$$

egyenlet egy harmadfokú, ún. elliptikus* görbét definiál $\mathbb{CP}^2$-en. Ezen görbék rendkívül sok szép és érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, a velük foglalkozó elmélet igen kiterjedt. Többek között a Fermat-sejtés bizonyításában is központi szerepet játszanak (vö. [Rónyai95]).

Az algebrai geometria tehát az algebrai varietások vizsgálata. Az algebrai geometria egyik alapproblémája a következő:

Osztályozzuk az algebrai varietásokat izomorfia erejéig.

Ez így túlságosan nehéz kérdés, amely talán soha nem lesz teljes mértékben megoldva, ezért részfeladatokat kell kitűznünk, és azok megoldásával foglalkoznunk.

Például egy ilyen – viszonylag egyszerű – részfeladat a kúpszeletek osztályozása. Következő lépésként lehet a 3-dimenziós térben a másodfokú[1] felületeket osztályozni. Ez az osztályozás – legalábbis a valós test felett – ismerős lehet az egyetemi geometria órákról.

Továbblépve, osztályozhatjuk általában a másodfokú hiperfelületeket, vagy tekinthetünk magasabb fokú egyenleteket. Ez utóbbi már igen komoly feladat. A továbbiakban mi más módon szorítjuk meg a feladatot. Először bevezetünk egy – az izomorfizmusnál gyengébb – ekvivalenciarelációt, majd az osztályozási feladatot több lépésre bontjuk.

[1] Hagyományosan ezeket szokás „másodrendű” felületeknek nevezni.

1.7 Definíció. Legyenek X és Y algebrai varietások, $Z \subset X$ egy valódi algebrai részhalmaz és $\phi : X \setminus Z \to Y$ egy leképezés. Ekkor ϕ-t az X-ről az Y-ra képező *racionális leképezés*nek nevezzük.

Ha ezenfelül létezik olyan $W \subset Y$ valódi algebrai részhalmaz, hogy ϕ egy izomorfizmust ad meg $X \setminus Z$ és $Y \setminus W$ között, akkor ϕ-t *biracionális leképezés*nek vagy röviden *biracionális*nak hívjuk.

Az elnevezést az indokolja, hogy ekkor $\phi^{-1} : Y \setminus W \to X$ ad egy Y-ról X-be képező racionális leképezést.

Ez természetes módon definiál egy ekvivalenciarelációt. Az ekvivalenciaosztályokat *biracionális osztály*oknak hívjuk. Ha X egy adott biracionális osztály tagja, akkor azt mondjuk, hogy X a biracionális osztály *modell*je. Ha X és Y azonos biracionális osztályhoz tartoznak, akkor azt mondjuk, hogy X biracionális Y-nal.

1.7.1 Megjegyzés. Ha $Z = \emptyset$, akkor azt fogjuk mondani, hogy ϕ mindenütt értelmezett (bi)racionális leképezés. Ez természetesen ugyanaz, mint ha ϕ-t az X-ről az Y-ba képező (közönséges) leképezésnek tekintjük.

Lényeges észrevétel a következő: mivel Z illetve W kisebb dimenziósak, mint X illetve Y, azt mondhatjuk, hogy két algebrai varietás biracionális, ha „majdnem mindenütt” izomorf.

1.8 Példa. Legyen $Z \subset X$ az X varietás valódi projektív részvarietása. Ekkor $X \setminus Z$ biracionális X-szel.

1.9 Példa. Tekintsük a következő leképezést:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ (u : t) &\longmapsto (ut^2 - u^3 : u^2t - t^3 : u^3). \end{aligned}$$

Ekkor $\phi(\mathbb{CP}^1)$ azon pontok halmaza, melyek koordinátáira $y^2z = x^2(x+z)$. Legyen $X = \mathbb{CP}^1$ és $Z = \{(1:1), (1:-1)\} \subseteq X$, illetve $Y = \phi(X)$ és $W = \{(0:0:1)\} \subseteq Y$. Ekkor az

$$\begin{aligned} Y \setminus W &\longrightarrow X \setminus Z \\ (x : y : z) &\longmapsto (-x : y) \end{aligned}$$

leképezés mutatja, hogy $X \setminus Z$ és $Y \setminus W$ izomorfak, azaz X biracionális Y-nal. Ugyanakkor ϕ nem $1-1$ értelmű, tehát nem izomorfizmus.

1.10 Példa. Legyen

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ (u : t) &\longmapsto (u^3 : u^2t : t^3). \end{aligned}$$

Ekkor $\mathbb{CP}^1$ biracionális $\psi(\mathbb{CP}^1)$-gyel, ami az $y^2z = x^3$ egyenlettel definiált görbe. Ez a leképezés $1-1$ értelmű, mégsem izomorfizmus, mert az

$$(x:y:z) \longmapsto (x:y)$$

leképezés nem terjed ki $(0:0:1)$-re.

Az utóbbi két példában ϕ és ψ mindenütt értelmezett biracionális leképezések. Nem szükségszerű azonban, hogy biracionális varietások között létezzék mindenütt értelmezett biracionális leképezés.

1.11 Példa. A fenti jelöléssel $\phi(X)$ és $\psi(X)$ biracionális varietások, de nem létezik közöttük mindenütt értelmezett biracionális leképezés.

1.11.1 Megjegyzés. Ebből is következik, hogy ϕ és ψ egyike sem izomorfizmus.

Lássunk végül egy példát *nem* biracionális varietásokra.

1.12 Példa. Az $y^2z = x(x^2+z^2)$ egyenlettel definiált elliptikus görbe nem biracionális $\mathbb{CP}^1$-gyel.

Ezt az állítást a következő fejezetben fogjuk bizonyítani.

1.13. Most már készen állunk, hogy az osztályozási problémát megfelelően részekre bontsuk.

- **(i)** Osztályozzuk a projektív algebrai varietásokat biracionális ekvivalencia erejéig.
- **(ii)** Minden biracionális osztályból válasszunk ki egy projektív modellt, amely valamilyen jól definiált értelemben egyszerű.
- **(iii)** Írjuk le az osztály tagjai és a **(ii)**-ben kiválasztott modell közötti biracionális ekvivalenciát megadó leképezéseket.

1.13.1 Megjegyzés. Érdemes **(ii)**-vel kezdeni a munkát, mert akkor **(i)**-t lehet úgy végezni, hogy csak a **(ii)**-ben kiválasztott modelleket vizsgáljuk. Ilyen módon nem kapunk egy osztályozást abban az értelemben, hogy nem állítunk fel egy listát. Ennek ellenére mégis kapunk egy bizonyos fajta osztályozást ugyanis lesz egy „receptünk", ami megmondja, hogy bizonyos, már osztályozott lépések elvégzése után eljutunk egy olyan objektumhoz, ami már szerepel egy listán, azaz már szintén osztályozva van.

Először is azt kell meghatározni, hogy mikor tekintsünk egy modellt „egyszerűnek".

1.14 Definíció. Legyen X egy algebrai varietás. Az $x \in X$ pont *sima*,* ha x-nek van egy olyan környezete X-ben, ami egy komplex differenciálható sokaság. Az $x \in X$ pontot, ha nem sima, *szinguláris pont*nak vagy *szingularitás*nak hívjuk. X *sima,* ha minden pontja sima, *szinguláris,* ha van nem sima pontja.

A következő tétel mutatja, hogy a simaság jó jelölt a keresett „egyszerű" tulajdonságra.

1.15 Tétel. *Legyen X egy projektív algebrai varietás. Ekkor létezik $\tilde{X}$ sima projektív algebrai varietás és egy mindenütt értelmezett $\tilde{X} \to X$ szürjektív biracionális leképezés. Azaz minden algebrai varietásnak van sima modellje.*

Sok neves matematikus foglalkozott ezzel a problémával. A következő egy valószínűleg nem teljes listája ezeknek: Riemann, Kronecker, Max Noether, Albanese, Jung, Walker, Hirzebruch, Zariski, Abhyankar adtak részleges vagy teljes bizonyítást az egy-, két-, illetve háromdimenziós esetre (Abhyankar majdnem minden pozitív karakterisztikában). Az általános esetet végül Hironaka bizonyította 1964-ben. Részletesebb történeti átekintés található pl. [Lipman75]-ben.

1.14.1 Megjegyzés. Ez a tétel talán a leggyakrabban használt tétel az algebrai geometriában. Jelentősége abban áll, hogy megengedi, hogy sima varietások vizsgálatára szoritkozzunk. A tétel legerősebb formája nagyon pontos információt ad az állításban szereplő biracionális leképezésről. Így **(iii)**-ra már adhatunk egy részleges választ és ezzel a továbbiakban elég egy sima projektív varietás és a **(ii)**-ben kiválasztott modell közötti leképezést leírni.

2.§ Görbék

2.1 Tétel. *Legyenek X és Y sima projektív görbék. Ha X biracionális Y-nal, akkor X és Y izomorfak.*

Ezek szerint már választ is tudunk adni **(ii)**-re, hiszen a fenti tétel és (1.14) alapján minden biracionális osztályban pontosan egy sima projektív görbe van. **(iii)**-ra is könnyű válaszolni ebben az esetben, hiszen (1.14) alapján a sima modellről az adott görbére képező leképezés szürjektív, és ez 1-dimenziós alakzatok esetében megfelelően leírja, hogy mi történik. Egy ilyen leképezésre láttunk példát (1.9)-ban.

Hátra van tehát a sima projektív görbék osztályozása. Egy sima komplex projektív görbe valós dimenziója 2, ezért szokás Riemann felületnek is hívni. A $\sqrt{-1}$-gyel való szorzás egy természetes irányítást ad a Riemann felületnek. A kompakt irányítható felületek gömbök, néhány fogantyúval ellátva. Az egyetlen topológiai invariáns a fogantyúk száma, ez a felület *nem*e (genus), jele g.

2.1 Példa. $X = \mathbb{CP}^1$. Ekkor X topológiailag egy gömb, tehát $g(X) = 0$.

Ennek a megfordítása is igaz.

2.2 Tétel. *Legyen X egy sima projektív görbe. Tegyük fel, hogy $g(X) = 0$. Ekkor X izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.*

2.2 Példa. Legyen E egy elliptikus görbe (pl. az (1.6)-ben definiált). Ekkor E izomorf $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$-tel (ld. [Rónyai95]), azaz E topológiailag egy tórusz, tehát $g(E) = 1$.

Ebből az is következik, hogy E nem lehet izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel, hiszen nem is homeomorf vele. Következésképpen (2.0) alapján E és $\mathbb{CP}^1$ nem is biracionálisak. Ezzel beláttuk (1.12)-et.

2.3 Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{CP}^2$ egy d-edfokú sima projektív síkgörbe. Ekkor*

$$g(A) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Ebből a formulából könnyen látszik, hogy $d = 1$ és $d = 2$ esetben $g = 0$, ami (2.1) alapján azt jelenti, hogy a görbe izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel. Ez azonban nem meglepő, hiszen a $d = 1$ esetben a görbe egy projektív egyenes, a $d = 2$ esetben pedig egy kúpszelet. Az is következik a formulából, hogy 2-nél magasabb fokú görbék neme pozitív, tehát nem lehetnek a $\mathbb{CP}^1$-gyel izomorfak, azaz ismét (2.0) szerint nem is biracionálisak vele.

2.3 Feladat. Bizonyítsuk be (2.1) gyenge változatát: Legyen X egy sima projektív síkgörbe. Tegyük fel, hogy $g(X) = 0$. Ekkor X izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.

Elevenítsük most fel a poliéderekről szóló Euler tételt. Adott egyszerű poliéderre jelölje c a csúcsok, e az élek és l a lapok számát. Ekkor

$$c - e + l = 2.$$

Egy poliéder egyszerű, ha topológiailag a gömbbel ekvivalens. A fenti tétel általánosítható a következő módon: olyan poliédereket tekintünk, melyek topológiailag ekvivalensek egy kompakt irányítható felülettel. A fenti jelöléssel ekkor

$$c - e + l = 2 - 2g.$$

Az itt fellépő $2 - 2g$ mennyiséget szokás a Riemann felület *Euler-Poincaré karakterisztikájá*nak nevezni.

2.4 Feladat. Legyen $f : Y \to X$ egy nem konstans leképezés sima projektív görbék között. Tegyük fel, hogy véges sok pont kivételével minden $x \in X$-nek d ősképe van.[2] Bizonyítsuk be, hogy

$$2g(Y) - 2 \geq d(2g(X) - 2).$$

2.5 Feladat. Legyen $f : Y \to X$ egy nem konstans leképezés sima projektív görbék között. Bizonyítsuk be, hogy

$$g(Y) \geq g(X).$$

Ez egy nagyon hasznos eredmény a görbék közötti leképezések tanulmányozására. (2.1)-mal egybevetve például a következő állítást kapjuk.

[2] Igazolható hogy a fenti f-re mindig létezik egy ilyen d. Használjuk fel ezt a tényt a következő feladat megoldásához!

2.6 Tétel. *Legyen X egy sima projektív görbe, és legyen $f : \mathbb{CP}^1 \to X$ egy nem konstans leképezés. Ekkor X izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.*

2.5.1 Megjegyzés. f nem feltétlenül izomorfizmus. A

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ [z:t] &\longmapsto [z^r : t^r] \end{aligned}$$

leképezésnél egy általános pontnak r őse képe van.

A sima projektív görbéket tehát topológiailag a nem különbözteti meg egymástól. Így a görbék egyik legfontosabb paramétere a nemük. Ez már ad egy durva osztályozást, amit tovább lehet folytatni az egyes osztályok specialis tulajdonságait felhasználva.

Ha $g = 0$, akkor a görbe egyértelműen meg van határozva, azaz izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel. Ha $g > 0$, akkor találunk egymással nem izomorf, azonos nemü görbéket.

Ha $g = 1$, akkor megmutatható, hogy még egy numerikus invariáns – az ún. j-invariáns – egyértelműen meghatározza a görbét.

Ha $g > 1$, akkor újabb módszerekre van szükség a további tanulmányozásra, de erre itt nem tudunk kitérni.

3.§ A kanonikus divizor

E fejezet célja a kanonikus divizor és a metszési szám fogalmának bevezetése.

3.1 Definíció. Az X n-dimenziós sima algebrai varietáson *divizor*nak* nevezünk egy $(n-1)$-dimenziós részvarietásokból alkotott formális összeget. Ezek nyilvánvalóan egy Abel csoportot alkotnak és értelmezünk közöttük egy ekvivalenciarelációt, az ún. *lineáris ekvivalenciát*. Ez hozzávetőlegesen a következőt jelenti. Ha X be van ágyazva egy projektív térbe, akkor két különböző hipersík által kimetszett divizort szeretnénk ekvivalensnek tekinteni. Lineáris ekvivalencia az a legszűkebb ekvivalencia reláció, amelyre ez teljesül és ami invariáns a csoport műveletre.

A lineáris ekvivalencia szokásos definíciója a következő: Legyen X egy algebrai varietás, és legyen f egy nem azonosan nulla racionális függvény* X-en. Ekkor lehet definiálni minden 1-kodimenziós részvarietásra az f multiplicitását Y mentén, $\mathrm{mult}_Y(f)$-et, ami rendelkezik az összes olyan tulajdonsággal, amit egy multiplicitás fogalomtól elvárhatunk, így például $\mathrm{mult}_Y(f) > 0$, ha $f|_Y = 0$ és $\mathrm{mult}_Y(f) < 0$, ha $f^{-1}|_Y = 0$.

Az f *divizorát*, $\mathrm{div}(f)$-et a következő módon definiáljuk:

$$\mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{mult}_Y(f)\, Y \in \mathrm{Div}(X),$$

ahol Y végigfut az 1-kodimenziós részvarietások halmazán.

Ekkor a $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ divizorokat *lineárisan ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan f racionális függvény, hogy

$$D_1 = D_2 + \mathrm{div}(f).$$

3.2 Definíció. Legyen $D \subseteq X$ egy divizor és $C \subseteq X$ egy görbe. A D és a C *metszési számá*t* a következő módon definiáljuk. Válasszunk egy D-vel lineárisan ekvivalens divizort, amely C-t transzverzálisan* metszi. Az így kapott metszéspontok száma független a választott divizortól, ezt a számot a D és a C metszési számának nevezzük, és $D \cdot C$-vel jelöljük.

Ha $\dim X = 1$, akkor X az egyetlen görbe, tehát csak egy metszési számot kell megadnunk. Ezen a következőt értjük: egy divizor most pontok formális összege, azaz $D = \sum n_i P_i$, ahol $P_i \in X$. Ekkor $D \cdot X = \sum n_i \in \mathbb{Z}$. Ezt a számot szokás $\deg D$-vel jelölni.

Figyeljük meg, hogy felületek esetében a divizorok görbékből alkotott formális összegek, tehát értelmezhetjük két divizor metszési számát. Ez hasznos lehet még akkor is, ha – az eredeti definíció szerint – csak a divizorok és görbék metszési számát akarjuk tudni, hiszen így több lehetőségünk van a számolásra.

3.3 Példa. $\mathbb{CP}^n$-ben két hiperfelület pontosan akkor lineárisan ekvivalens, ha azonos fokúak.[3] Ez azt jelenti, hogy egy d-edfokú hiperfelület lineárisan ekvivalens dH-val, ahol H egy hipersík. Látjuk tehát, hogy lineáris ekvivalencia erejéig minden divizort írhatunk $aH,\ a \in \mathbb{Z}$ alakba, tehát egy görbe és egy tetszőleges divizor metszési számának kiszámolásához csupán a görbe *foká*nak ismerete szükséges, amit a következő módon definiálunk:

$$\deg C = H \cdot C.$$

3.3.1 Megjegyzés. Ha $n = 2$, akkor C maga is egy hiperfelület, tehát már definiáltuk C fokát. Szerencsére az újonnan definiált fok megegyezik a régivel.

3.4 Példa. Legyen most $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{CP}^2$ egy d_1- és egy d_2-fokú görbe. Az előző példa alapján C_1 lineárisan ekvivalens $d_1 L$-lel és C_2 lineárisan ekvivalens $d_2 L$-lel, ahol L egy tetszőleges egyenes. Két egyenes egy közös pontban találkozik, tehát $L \cdot L = 1$ a definíció alapján. Ezek szerint $C_1 \cdot C_2 = d_1 L \cdot d_2 L = d_1 d_2$,tehát $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

[3] Az úgy nevezett d-szeres beágyazás – ami az $(x_0 : \cdots : x_n) \to (x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \cdots : x_n^d)$ hozzárendelésnek megfelelő leképezés – a $\mathbb{CP}^n$-et úgy ágyazza be egy $\binom{n+d}{d} - 1$-dimenziós projektív térbe, hogy az eredeti d-edfokú hiperfelületek előállnak hipersíkmetszetként.

3.5 Példa. Tekintsük az $X \subseteq \mathbb{CP}^3$, $xy = zt$ egyenlettel definiált felületet. Legyenek

$$\begin{aligned} R_1 =& \{(u:0:v:0) \mid (u:v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X, \\ R_2 =& \{(u:0:0:v) \mid (u:v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy $R_1 \cap R_2 = \{(1:0:0:0)\}$ és, hogy $R_1 \cup R_2$ megegyezik X és a $H = (y = 0)$ sík metszetével. Jelölje H' az $(x = z)$ síkot. Ekkor $R_1 + R_2$ lineárisan ekvivalens $X \cap H'$-vel, azaz $(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2)$ definíció szerint az

$$(R_1 \cup R_2) \cap (X \cap H')$$

metszet számossága. Ez a metszet nem más, mint

$$(X \cap H) \cap (X \cap H') = X \cap H \cap H'.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy a fenti metszet két pontból – $(1:0:1:0)$ és $(0:0:0:1)$ – áll, azaz

$$(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2) = 2.$$

$R_1 \cap R_2$ egy pontból áll, tehát

$$\begin{gathered} R_1 \cdot R_2 = 1, \\ (R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_1 + 2R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_2 = R_1 \cdot R_1 + 2 + R_2 \cdot R_2, \\ R_1 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_2 = 0. \end{gathered}$$

Figyeljük meg, hogy z és t felcserélése a $\mathbb{CP}^3$-nek egy olyan automorfizmusát adja meg, amely X-et önmagára képezi le, és R_1-et és R_2-t felcseréli. Ezek szerint

$$R_1 \cdot R_1 = R_2 \cdot R_2 = 0.$$

3.6 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy R_1 és R_2 nem lineárisan ekvivalensek X-en.

Érdemes megjegyezni, hogy $R_1, R_2 \subset H \simeq \mathbb{CP}^2$. A síkon bármely két egyenes (hipersík) lineárisan ekvivalens, tehát ott $(R_1 \cdot R_1)_H = (R_2 \cdot R_2)_H = 1$. Láthatjuk tehát, hogy két görbe metszési száma, illetve lineáris ekvivalenciája nagy mértékben függ attól, hogy mely felületen tekintjük őket.

Következő lépésként választunk egy divizor osztályt, amelynek elemeit kanonikus divizoroknak[4] hívjuk. Ennek a jelentősége a következő: választunk egy divizor

[4] Az alábbitól eltérő, algebrai definíciót ld. [Szamuely96].

osztályt minden X sima algebrai varietásra egyszerre, ugyanazzal a módszerrel, azaz „kanonikusan".

Legyen X n-dimenziós sima algebrai varietás, azaz egy komplex sokaság. Egy *racionális n-forma* X-en egy olyan ω n-differenciálforma, melynek esetleg pólusa lehet, de egyébként holomorf módon változik. Ez pontosabban annyit jelent, hogy egy $(U, z_1, \dots, z_n)$ lokális térképen $\omega = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, ahol f egy alkalmas racionális függvény* X-en.

Ekkor f definiál egy $\operatorname{div}(f)$ divizort U-n. Igazolható, hogy ha U végigfut az X egy nyílt halmazokból álló fedésén, akkor az így definiált divizorok a megfelelő halmazok metszetein megegyeznek, ezzel definiálva egy divizort X-en.

Fontos megjegyezni, hogy egy racionális n-formát leíró lokális függvények általában nem ragadnak össze egy globális racionális függvénnyé, tehát az így kapott divizor nem $\operatorname{div}(f)$ alakú divizor.

Egy racionális n-forma által definiált divizort *kanonikus divizor*nak nevezünk. Igazolható, hogy különböző racionális n-formák különböző, de egymással lineárisan ekvivalens divizorokat adnak, ezért a kanonikus divizorok osztálya jól definiált.

Az X (bármely) kanonikus divizorát K_X-szel jelöljük. A továbbiakban az X-en található görbék K_X-szel való metszési számát fogjuk vizsgálni, és látni fogjuk, hogy ez meglepően sokat árul el X geometriájáról. Érdemes megjegyezni, hogy a definíció alapján K_X és egy görbe metszési száma jól definiált annak ellenére, hogy K_X-nek csak a lineáris ekvivalenciaosztálya van pontosan meghatározva.

3.7 Példa. Legyen $X = \mathbb{CP}^n$ az $x_0, \dots, x_n$ koordinátákkal és legyen minden $i = 0, \dots, n$-re $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{CP}^n \mid x_i \neq 0\}$. A bevezetőben láttuk, hogy U_i azonosítható $\mathbb{C}^n$-nel az $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$ koordinátákkal. (Értelemszerüen $\frac{x_i}{x_i}$-t kihagyjuk. Ez a megjegyzés a továbbiakra is érvényben marad külön említés nélkül.) Tekintsük az

$$\omega_i = (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i} \cdots \frac{x_n}{x_i}} d\left(\frac{x_0}{x_i}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_i}\right)$$

racionális n-formát U_i-n. Ekkor tetszőleges i, j-re az $U_i \cap U_j$ halmazon két koordinátarendszerünk is van. Irjuk fel ω_i-t az $\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}$ koordinátarendszerben! A törtek differenciálására vonatkozó szabály szerint

$$d\left(\frac{x_l}{x_i}\right) = d\left(\frac{\frac{x_l}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right) = \frac{\frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{x_l}{x_j}\right) - \frac{x_l}{x_j} d\left(\frac{x_i}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^2}.$$

Így

$$\begin{aligned}
\omega_i &= (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i}\cdots\frac{x_n}{x_i}}\, d\left(\frac{x_0}{x_i}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_n}{x_i}\right)\\
&= (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i}\cdots\frac{x_n}{x_i}}\, d\left(\frac{\frac{x_0}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{1}{\frac{x_i}{x_j}}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{\frac{x_n}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right)\\
&= (-1)^{i+1} \frac{1}{\frac{x_0}{x_j}\cdots\frac{x_n}{x_j}} d\left(\frac{x_0}{x_j}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_{j-1}}{x_j}\right)\wedge d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\wedge d\left(\frac{x_{j+1}}{x_j}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_n}{x_j}\right)\\
&= (-1)^j \frac{1}{\frac{x_0}{x_j}\cdots\frac{x_n}{x_j}}\, d\left(\frac{x_0}{x_j}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_n}{x_j}\right) = \omega_j
\end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy az U_i halmazokon egyenként definiált racionális n-formák a megfelelő halmazok metszetein megegyeznek. Ez annyit jelent, hogy így megadtunk egy az egész X-en értelmezett ω racionális n-formát, melynek az egyes U_i-kre való megszoritása éppen ω_i. Az ω_i-t definiáló racionális függvényeknek, $\frac{1}{\frac{x_0}{x_i}\cdots\frac{x_n}{x_i}}$, zérushelyük nincs, de egyszeres pólusuk van a koordinátahipersíkok mentén Így könnyen látható, hogy az ω által definiált divizor nem más, mint $-(H_0+H_1+\cdots+H_n)$, ahol $H_i=\{(x_0:\cdots:x_n)\in\mathbb{CP}^n \mid x_i=0\}$, azaz ha H egy tetszőleges hipersík, akkor

$$K_X = -(n+1)H.$$

Az $n=1$ speciális esetben tehát $K_{\mathbb{CP}^1}=-2P$, ahol $P\in\mathbb{CP}^1$ egy tetszőleges pont. Így

$$\deg K_{\mathbb{CP}^1} = -2.$$

Legyen most X egy sima projektív felület, $C\subseteq X$ egy projektív görbe. Ekkor a K_X+C és a C görbe metszési száma nagyon fontos összefüggést ad meg a felület kanonikus divizora és a görbe kanonikus divizora között.

3.8 Tétel. $(K_X+C)\cdot C=\deg K_C$.

Először is ellenőrizzük, hogy ez $\mathbb{CP}^1$-re azt az eredményt adja, amit várunk.

3.8 Példa. Legyen $\mathbb{CP}^1\simeq L\subseteq\mathbb{CP}^2$. $K_{\mathbb{CP}^2}=-3L$, így valóban

$$(K_{\mathbb{CP}^2}+L)\cdot L = -2L\cdot L = -2 = \deg K_L.$$

3.9 Példa. Legyen $\mathbb{CP}^1\simeq C\subseteq\mathbb{CP}^2$ egy kúpszelet. C lineárisan ekvivalens $2L$-lel, tehát

$$(K_{\mathbb{CP}^2}+C)\cdot C = (-3L+2L)\cdot 2L = -L\cdot 2L = -2 = \deg K_C.$$

(3.7) segítségével sok esetben ki tudjuk számolni a görbe kanonikus divizorának fokát.

3.10 Példa. Legyen $E \subseteq \mathbb{CP}^2$ az (1.6)-ben definiált elliptikus görbe. Ekkor E lineárisan ekvivalens $3L$-lel, azaz $K_{\mathbb{CP}^2} + C = 0$, tehát

$$\deg K_E = 0.$$

3.11 Példa. Legyen $A \subseteq \mathbb{CP}^2$ egy d-edfokú sima projektív síkgörbe. Ekkor A lineárisan ekvivalens dL-lel, azaz $K_{\mathbb{CP}^2} + A$ lineárisan ekvivalens $(d-3)L$-lel, tehát

$$\deg K_A = d(d-3).$$

Ha ezeket a példákat összehasonlítjuk a (2.1), (2.2), (2.2) példákkal, akkor látjuk, hogy K foka és a görbe neme között szoros összefüggés van. Nevezetesen K foka éppen az Euler-Poincaré karakterisztika (-1)-szerese.

3.12 Tétel. *Legyen X egy sima projektív görbe. Ekkor*

$$\deg K_X = 2g(X) - 2.$$

Ennek a tételnek a segítségével új formába önthetjük, amit a görbék osztályozásáról tudunk.

3.12 Tétel. *Legyen X egy algebrai görbe. Ekkor egyértelműen létezik $\tilde{X}$, az X-szel biracionálisan ekvivalens sima projektív görbe, amely a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik:*

(3.11.1) $\deg K_{\tilde{X}} = -2$, *ekkor $\tilde{X}$ izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.*
(3.11.2) $\deg K_{\tilde{X}} = 0$, *ekkor $\tilde{X}$ egy elliptikus görbe.*
(3.11.3) $\deg K_{\tilde{X}} > 0$.

3.11.1 Megjegyzés. (1.14) utáni megjegyzés értelmében ezzel a görbék egy majdnem teljes osztályozását kapjuk. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy (1.14)-et görbékre nem nehéz bizonyítani és az X és az $\tilde{X}$ közötti kapcsolat is könnyen leírható. Ami hiányzik a teljességhez, az a fenti tétel harmadik osztályába eső görbék egy pontosabb rendszerezése. Erre már nincs alkalmunk kitérni, de annyit azért érdemes megjegyezni, hogy ezek a görbék – rögzitett g-re – $3g-3$ komplex paramétertől függenek.

4.§ Felületek

Felületek esetében is először **(ii)**-t próbáljuk megoldani, azaz adott biracionális osztályból szeretnénk kiválasztani egy „egyszerű” modellt. (1.14) alapján tudjuk, hogy választhatunk sima modellt, de a görbékkel ellentétben itt egy sima modell már nem egyértelmű.

4.1 Példa. Legyen $X \subseteq \mathbb{CP}^3$ az $xy = zt$ egyenlettel definiált sima másodfokú felület. Legyen $P = (0 : 0 : 0 : 1) \in X$ és

$$\sigma : X \setminus \{P\} \to \mathbb{CP}^2$$

a P-ből való vetítés, azaz

$$(x : y : z : t) \longmapsto (x : y : z).$$

Legyen $Z = (z = 0) \cap X \subseteq \mathbb{CP}^3$ és $W = (z = 0) \subseteq \mathbb{CP}^2$. Könnyen látható, hogy σ izomorfizmust ad meg $X \setminus Z$ és $\mathbb{CP}^2 \setminus W$ között, azaz X biracionális $\mathbb{CP}^2$-tel.

Legyenek most

$$\begin{aligned} L_1 =& \{(u : 0 : v : 0) \mid (u : v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X, \\ L_2 =& \{(0 : u : 0 : v) \mid (u : v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X. \end{aligned}$$

L_1 és L_2 két olyan projektív görbe X-en, melyek nem metszik egymást, tehát $L_1 \cdot L_2 = 0$. (3.4) alapján tehát X és $\mathbb{CP}^2$ biracionálisak, de nem izomorfak. Érdemes megjegyezni, hogy nem is homeomorfak. Ennek bizonyítását azonban az olvasóra bizzuk.

A következő feladat segítségével egy – a metszési számtól független – bizonyítást adunk arra, hogy $\mathbb{CP}^2$-en bármely két görbe metszi egymást.

4.2 Feladat. (a) Legyen $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{C}[x, y, z]$ egy maximális ideál és $I \lhd \mathbb{C}[x, y, z]$ egy tetszőleges ideál, amelyre $\mathfrak{M}^r \subseteq I \subseteq \mathfrak{M}$ valamilyen $r \in \mathbb{Z}$-re. Bizonyítsuk be, hogy I nem generálható két elemmel.

(b) Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ felületek. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor $X \cap Y$ nem állhat egy pontból.

[*Használjuk fel a következő állítást (ld.* [Kollár80, F.2]*): minden $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{C}\,[x, y, z]$ maximális ideálhoz léteznek olyan $a, b, c \in \mathbb{C}$ konstansok, hogy $\mathfrak{M} = (x - a, y - b, z - c)$.*]

4.2.1 Megjegyzés. Ez az állítás nem igaz $\mathbb{R}$ felett, ahogy azt egy gömb és egy azt érintő sík példája mutatja.

Tekintsünk most két projektív görbét $\mathbb{CP}^2$-en, C_1-et és C_2-t. Legyen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{C}^3$ az a két felület, amelyeket úgy kapunk, hogy a C_1-et és C_2-t definiáló polinomok $\mathbb{C}^3$-beli zérushelyét tekintjük. $(0,0,0) \in F_1 \cap F_2$, tehát $F_1 \cap F_2$ nem üres, azaz (4.2) alapján tartalmaz egy $0 \neq P \in F_1 \cap F_2$ pontot. Ez a P meghatároz egy pontot $\mathbb{CP}^2$-en, amely közös pontja lesz C_1-nek és C_2-nek. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{CP}^2$-en bármely két görbe metszi egymást.

Biracionálisan ekvivalens sima felületek tehát nem feltétlenül izomorfak, így további munkára van szükség, hogy a keresett modellt megtaláljuk.

4.3 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. Egy $C \subseteq X$ projektív görbét (-1)-*görbé*nek hívunk, ha C izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel és $K_X \cdot C = -1$.

4.3.1 Megjegyzés. Egy (-1)-görbét általában úgy szokás definiálni, hogy az egy olyan $\mathbb{CP}^1$-gyel izomorf görbe, amelyre $C \cdot C = -1$. Ez (3.7) és (3.7) miatt ekvivalens a fenti definícióval.

4.4 Példa. Legyen $\Sigma_0 = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in X \setminus \{P\}\} \subset \mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^2$, ahol σ a (4.1)-ben definiált leképezés. Legyen továbbá $\Sigma = \overline{\Sigma}_0$ és $q : \Sigma \to X$ a $\mathbb{CP}^3$-ra való projekcióból adódó leképezés. Ekkor $q^{-1}(P)$ egy (-1)-görbe.

X sima, azaz P egy alkalmas környezetében megegyezik $0 \in \mathbb{C}^2$ egy alkalmas környezetével. Így $q : \Sigma \to X$ lokálisan a következő példával egyezik meg.

4.5 Példa. Legyen $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ a 0-ból való vetítés. Legyen továbbá $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \supset \Gamma = \big\{(x, \pi(x)) \mid x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\big\}$, $X = \overline{\Gamma}$ és $p : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}^2$ az első tényezőre való projekció.

4.6 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $C = X \cap p^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1$.

Igazolható, hogy $K_X \cdot C = -1$, azaz C egy (-1)-görbe. Érdekes megjegyezni, hogy lokálisan (az euklideszi topológia értelmében) minden (-1)-görbe izomorf ezzel a példával.

4.6.1 Megjegyzés. A fenti példákban szereplő konstrukció az úgy nevezett felfújás. Részletesebben erről ld. [Kollár80].

A (-1)-görbék fontos szerepét mutatja a következő tétel.

4.7 Castelnuovo Tétele. *Legyen X egy sima projektív felület, és $C \subseteq X$ egy (-1)-görbe. Ekkor létezik egy*

$$f : X \to X_0$$

mindenütt értelmezett szürjektív biracionális leképezés egy X_0 sima projektív felületre, ahol C egy pontra képződik le, azaz $f(C) = P \in X_0$ és az

$$f : X \setminus C \to X_0 \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus.

Ez a tétel azt mondja, hogy egy (-1)-görbét össze tudunk húzni. Létezik azonban olyan felület, amelyen végtelen sok (-1)-görbe van. A következő tétel mutatja, hogy ennek ellenére a fenti módszerrel véges sok lépésben elérhető, hogy ne maradjon egyetlen (-1)-görbe sem. Ezek a tények nem ellentmondóak, ugyanis K_X, és így annak a görbékkel való metszési számai is változnak, tehát egy (-1)-görbe összehúzásával esetleg más görbék is megszünnek (-1)-görbének lenni.

4.7 Tétel. *Legyen X sima projektív felület. Ekkor létezik leképezéseknek olyan*

$$X \to X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_k$$

sorozata, hogy minden $X_i \to X_{i+1}$ egy (-1)-görbe összehúzása, és X_k-n nincs egyetlen (-1)-görbe sem.

4.7 Definíció. Egy $\mathbb{CP}^2$-tel biracionális sima felületet *racionális* felületnek hívunk.

4.8 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. X-et *vonalfelület*nek (ruled surface) hívjuk, ha létezik egy $f : X \to S$ leképezés, ahol S egy sima görbe, és minden $s \in S$-re $f^{-1}(s)$ izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.

4.9 Példa. Legyenek $f : X \to S$ és $g : Y \to S$ vonalfelületek ugyanazzal az S bázisgörbével. Ekkor X és Y biracionálisak. Így például minden vonalfelület biracionális $S \times \mathbb{CP}^1$-gyel.

4.10 Példa. Legyen $X \subseteq \mathbb{CP}^3$ az $xy = zt$ által definiált felület. Azt már láttuk (4.1)-ben, hogy X racionális. Legyen most $L \subseteq X$ egy egyenes (pl. $\{(0 : u : 0 : v) \mid (u : v) \in \mathbb{CP}^1\}$). Definiálunk egy $f : X \to L$ leképezést. Legyen $x \in X$. Ha $x \in L$, akkor legyen $f(x) = x$. Ha $x \notin L$, akkor legyen H az x és az L által kifeszített sík. Ekkor $X \cap H$ egy olyan másodfokú algebrai halmaz a $H \simeq \mathbb{CP}^2$-en, ami tartalmaz egy egyenest és rajta kívül egy pontot. Tehát $X \cap H$ két egyenes uniója. Legyen most $f(x)$ ezen két egyenes metszéspontja. Vegyük észre, hogy x helyett az $X \cap H$ L-től különböző komponensének bármely pontjára ugyanazt az $f(x)$-t kapjuk, tehát minden $l \in L$-re $f^{-1}(l)$ izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel, azaz X egy vonalfelület.

(3.7) szerint $K_{\mathbb{CP}^2} = -3L$, ahol L egy tetszőleges egyenes, tehát minden C projektív görbére

$$K_{\mathbb{CP}^2} \cdot C < 0,$$

de $\mathbb{CP}^2$ nem tartalmaz (-1)-görbét.

Hasonlóan, ha X egy tetszőleges vonalfelület, legyen C a vonalazást adó leképezés egy rostja $(= f^{-1}(s))$. Ekkor

$$K_X \cdot C = -2.$$

Racionális és vonalfelületeken tehát találunk olyan C projektív görbéket, melyekre

$$K \cdot C < 0,$$

még olyan esetben is, amikor a felület nem tartalmaz (-1)-görbét.

Érdekes megfigyelni, hogy ez a tulajdonság jellemzi ezeket a felületeket.

4.11 Tétel. *Legyen X egy tetszőleges algebrai felület. Ekkor létezik $\tilde{X}$, az X-szel biracionálisan ekvivalens sima projektív felület, amely nem tartalmaz (-1)-görbéket, és a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik.*

(4.10.1) $\tilde{X} = \mathbb{CP}^2$.

(4.10.2) $\tilde{X} = S \times \mathbb{CP}^1$ *alkalmas S sima projektív görbére, mely nem izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel.*

(4.10.3) $K_{\tilde{X}} \cdot C \geq 0$ *minden $C \subseteq \tilde{X}$ projektív görbére.*

Hogyan válasszunk tehát modellt? Ha X racionális, kézenfekvő $\mathbb{CP}^2$-et választani. Ha X biracionális egy vonalfelülettel, akkor válasszuk a tétel által adott $\tilde{X} = S \times \mathbb{CP}^1$-et.

4.11 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. X-et *minimális*nak hívjuk, ha nem tartalmaz (-1)-görbét. Ha ezen felül X nem izomorf $\mathbb{CP}^2$-tel és nem vonalfelület, akkor (4.10) alapján következik, hogy minden $C \subseteq X$ projektív görbére, $K_X \cdot C \geq 0$.

A továbbiakban a (4.10.3) esettel foglalkozunk, azaz olyan felületeket tekintünk, melyek nem racionálisak, és nem biracionálisak egy vonalfelülettel.

4.12 Tétel. *Legyenek X és Y minimális felületek. Tegyük fel, hogy X és Y egyike sem vonalfelület, és nem izomorfak $\mathbb{CP}^2$-tel. Ekkor, ha X biracionális Y-nal, akkor egyben izomorfak is.*

4.11.1 Megjegyzés. (4.1), (4.6) és (4.9) mutatják, hogy a tétel feltételei szükségesek.

(4.10) szerint a tétel feltételei ekvivalensek azzal, hogy $K_X \cdot C \geq 0$ minden $C \subseteq X$ projektív görbére és $K_Y \cdot D \geq 0$ minden $D \subseteq Y$ projektív görbére. Azaz a tétel úgy is fogalmazható, hogy egy biracionális osztályban legfeljebb egy ilyen tulajdonságú felület lehet. Ez pontosan az a tulajdonság, amire szükségünk van. Látjuk tehát, hogy (4.10) ebben az esetben is szolgáltat egy egyértelmű modellt.

Ezzel tehát megtaláltuk a keresett modellt, azaz választ adtunk **(ii)**-re. Figyeljük meg, hogy **(iii)**-t is megválaszoltuk, hiszen (1.14) alapján tudjuk, hogy hogyan kapunk egy sima modellt, majd pedig (4.6) írja le, hogy egy tetszőleges sima modell hogyan képeződik le a minimális modellre.

Hátra van **(i)**, azaz a minimális felületek vizsgálata. Ennek egyik fő eszköze a következő:

4.12 Tétel. *Legyen X egy minimális felület, amely nem izomorf $\mathbb{CP}^2$-tel és nem vonalfelület. Ekkor minden elég nagy $m \in \mathbb{N}$-re létezik egy*

$$\phi_{mK_X} : X \to \mathbb{CP}^{N(m)}$$

leképezés, hogy mK_X úgy adódik, mint $\phi_{mK_X}(X)$ és egy $\mathbb{CP}^{N(m)}$-beli hipersík metszetének az ősképe, kivételesen tehát minden $C \subseteq X$ projektív görbére

$$mK_X \cdot C = \deg \phi_{mK_X}(C).$$

Továbbá, ha $m, m' \in \mathbb{N}$ megfelelően nagyok, akkor $\phi_{mK_X}(X)$ és $\phi_{m'K_X}(X)$ izomorfak.

4.11.1 Megjegyzés. Itt deg a (3.3)-ben definiált $\mathbb{CP}^n$-beli fokszámot jelöli.

4.12 Definíció. $\phi_{mK_X}(X)$ az X *kanonikus modell*je (elég nagy $m \in \mathbb{N}$-re). X *Kodaira dimenzió*ját a $\kappa(X) = \dim \phi_{mK_X}(X)$ képlettel definiáljuk és ϕ_{mK_X}-t az X *m-kanonikus leképezés*ének hívjuk.

Ezután a minimális felületeket osztályokba lehet sorolni Kodaira dimenziójuk szerint, majd az egyes osztályokat külön-külön vizsgálni a fenti ϕ_{mK_X} leképezés segítségével.

A durva osztályozás a következő:

4.13 Tétel. *Ha $\kappa(X) = 0$, akkor X a következő osztályok egyikéhez tartozik:*

(1) *$K3$ felület, azaz X olyan egyszeresen összefüggő felület, amelyre $K_X = 0$.*
(2) *Enriques felület, azaz X olyan felület, melyre $H_1(X, \mathbb{R}) = 0$ és teljesül, hogy $K_X \neq 0$, de $2K_X = 0$.*[5]
(3) *Abel felület, azaz X rendelkezik egy complex Lie csoport struktúrával.*
(4) *hiperelliptikus felület, azaz X rendelkezik egy $\mathbb{CP}^1$-re való leképezéssel, amire minden pont ősképe egy elliptikus görbe.*

4.13 Tétel. *Ha $\kappa(X) = 1$, akkor X egy ún. elliptikus felület, azaz X rendelkezik egy (tetszőleges) görbére való leképezéssel, amire majdnem minden pont ősképe egy elliptikus görbe.*

4.13 Tétel. *Ha $\kappa(X) = 2$, akkor X egy ún. általános típusú felület, azaz olyan felület, amelyre a fenti tétel által adott ϕ_{mK_X} leképezés biracionális.*

A felsorolt osztályok mindegyike rendelkezik valamilyen speciális tulajdonsággal ami alapot nyújt további tanulmányozásukra. Bizonyos kérdések még tisztázásra várnak annak ellenére, hogy a felületek osztályozása befejezettnek tekinthető.

[5] $H_1(X, \mathbb{R})$ az X első homológia csoportja valós együtthatókkal. Könnyen belátható, hogy egy Enriques felület fundamentális csoportja $\mathbb{Z}_2$ és az univerzális fedőtere egy $K3$ felület. Az itt használt topológiai fogalmakról bővebben ld. [Rotman88].

5.§ 3-dimenziós varietások

Az első lépés ismét az, hogy (1.14)-et használva a sima 3-dimenziós varietások vizsgálatára szorítkozunk. Ezután hasonlóan szeretnénk eljárni, mint a felületek esetében.

5.1 Definíció. Az X sima projektív varietást *minimális*nak nevezzük, ha minden $C \subseteq X$ projektív görbére, $K_X \cdot C \geq 0$.

A célunk az, hogy kiindulva egy tetszőleges sima projektív varietásból, „egyszerű” transzformációk segítségével találjunk egy minimális modellt. Az első lépés Castelnuovo tételének általánosítása.

5.2 Gyenge Összehúzási Tétel. *Legyen X egy legfeljebb 3-dimenziós sima projektív varietás. Ha X nem minimális, akkor létezik egy $\mathbb{CP}^1$-gyel izomorf $C \subseteq X$ projektív görbe, amelyre $K_X \cdot C < 0$ és egy $\phi : X \to Y$ leképezés, amely C-t egy pontra képezi le. Továbbá minden ϕ által összehúzott görbe K_X-et negatívan metszi.*

Vegyük észre, hogy ez a tétel nem teljesen analóg Castelnuovo tételével. Ha X-et egy felületnek választjuk, akkor a tétel lényegében azt mondja, hogy vagy van egy (-1)-görbe, amit össze tudunk húzni, vagy X egy vonalfelület, és a tétel által adott ϕ éppen az a leképezés, ami X-et azzá teszi, vagy $X \simeq \mathbb{CP}^2$, és minden görbét összehúzunk. Így ez a tétel inkább Castelnuovo tételének és (4.10)-nak az együttes analógja.

A következő természetes lépés az lenne, hogy az (5.1) ismételt alkalmazásával eljutunk egy minimális modellhez. Ez azonban nem működik, mert azt nem tudjuk biztosítani, hogy Y sima legyen, ezért a tétel Y-ra már nem alkalmazható.

Tehát, amire szükségünk van, az egy szinguláris varietásokra vonatkozó összehúzási tétel. Ennek természetesen vannak korlátai, mert például K_X és $K_X \cdot C$ értelmezéséhez elengedhetetlen, hogy a szingularitások ne legyenek nagyon kezelhetetlenek (vö. Függelék).

Végül is létezik szingularitásoknak egy olyan osztálya – az ún. *terminális* szingularitások (ld. [Kollár87, 11.9]) –, melyekre K_X és $K_X \cdot C$ értelmezhető, továbbá (5.1) is – kisebb módosításokkal – igaz marad olyan X projektív varietásokra, melyeknek legfeljebb ilyen szingularitásaik vannak.

Felmerül azonban egy újabb probléma. Ha elemezzük az összehúzások fajtáit, akkor azt találjuk, hogy egy típus kivételével, Y-nak is legfeljebb terminális szingularitásai vannak. Abban az esetben azonban, ha $\dim X = 3$ és ϕ csak egy görbét húz össze, akkor Y szingularitása már olyan kezelhetetlen lesz, hogy a metszési számot nem lehet értelmesen definiálni. Ezért szükség van egy új típusú transzformációra.

5.2 Definíció. Legyen X egy 3-dimenziós projektív varietás legfeljebb terminális szingularitásokkal. Tegyük fel, hogy $C \subseteq X$ egy olyan projektív görbe, amelyre

$$K_X \cdot C < 0.$$

Tegyük fel továbbá, hogy az (5.1) által adott $\phi : X \to Y$ leképezés olyan, hogy $\phi(C) = P \in Y$ egy pont, és a

$$\phi : X \setminus C \to Y \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus.

Amennyiben létezik egy X^+ 3-dimenziós projektív varietás legfeljebb terminális szingularitásokkal, és egy $C^+ \subseteq X^+$ projektív görbe, amelyre

$$K_{X^+} \cdot C^+ > 0,$$

továbbá létezik egy olyan $\phi^+ : X^+ \to Y$, hogy $\phi^+(C^+) = P \in Y$ és a

$$\phi^+ : X^+ \setminus C^+ \to Y \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus, akkor a $\phi^+ : X^+ \to Y$ leképezést a $\phi : X \to Y$ *flip*jének nevezzük.

Ennek a transzformációnak (flip) a lényege a következő: Ha egy olyan görbére akadunk, amelyre az összehúzási tétel egy olyan ϕ-t ad, ami semmi mást nem húz össze, mint ezt az egy görbét, akkor a keletkező varietás szingularitása már nem lesz olyan amit még kezelni tudunk, ezért az eddigi úton nem haladhatunk. Ennek ellenére a görbét el szeretnénk tüntetni. Ezért a görbét „kivágjuk", és egy másikkal helyettesítjük, úgy, hogy az új görbe már pozitívan metszi K_X-et. Az természetesen nem nyilvánvaló, hogy ez végrehajtható. Az a tény hogy igen, az úgy nevezett Flip Tétel (Mori), a magasabb dimenziós geometria egyik legmélyebb eredménye.

A követendő módszer most már világos. Amit lehet összehúzunk, ha elakadunk, keresünk egy flipet, majd ismét összehúzunk, amíg el nem érünk egy minimális modellt.

Ezt az egyszerűen hangzó tervet azonban nem olyan egyszerű megvalósítani. Először is be kell látni, hogy a flip létezik. Másodszor pedig, hogy a fent vázolt módszer egyszer véget ér. Ezek nagyon komoly, nehéz állítások, de szerencsére bizonyítottan igazak.

Most már ki tudjuk mondani tételünket, amely egészen hasonló lesz a 2-dimenziós esethez. Lényeges különbség, hogy a minimális modellt nem tudjuk simának választani, hanem meg kell engednünk terminális szingularitásokat. Érdemes megjegyezni, hogy egy felület, amelynek legfeljebb terminális szingularitásai vannak, mindig sima, tehát tekinthetjük úgy, hogy a minimális modelleknek mindig legfeljebb terminális szingularitásai vannak, csak éppen ez kis dimenziókban nem különbözteti meg őket a sima varietásoktól. Ezért először is kiterjesztjük a minimális modell fogalmát.

5.3 Definíció. Az X projektív varietást, melynek legfeljebb terminális szingularitásai vannak *minimális*nak nevezzük, ha $K_X \cdot C \geq 0$ minden $C \subseteq X$ projektív görbére.

5.4 Tétel. *Legyen X egy 3-dimenziós varietás. Ekkor létezik $\tilde{X}$, az X-szel biracionálisan ekvivalens, legfeljebb terminális szingularitásokkal rendelkező 3-dimenziós projektív varietás, amely a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik.*

(5.3.1) *Létezik egy $\phi : \tilde{X} \to Z$, hogy $\dim Z < \dim X$, és $K_{\tilde{X}} \cdot C < 0$ minden olyan $C \subseteq \tilde{X}$ projektív görbére, amelyre $\phi(C)$ egy pont.*

(5.3.2) *Minden $C \subseteq \tilde{X}$ projektív görbére $K_{\tilde{X}} \cdot C \geq 0$, azaz $\tilde{X}$ minimális.*

Ez tehát megválaszolja **(ii)**-t. A válasz **(iii)**-ra kissé bonyolultabb, mint a felületek esetében, de ez nem meglepő, hiszen a dimenzió növekedésével a struktúrák várhatóan bonyolódnak. (1.14) megadja, hogy hogyan jutunk el egy sima modellhez. A sima modelltől a minimális modellig olyan lépésekkel tudunk eljutni, melyek mindegyike vagy az (5.1) által adott összehúzás, vagy pedig egy flip.

Marad tehát **(i)**. Az (5.3.1) esetben visszavezettük a problémát alacsonyabb dimenziós varietások vizsgálatára, (5.3.2)-ben pedig találtunk egy minimális modellt.

A minimális modellek vizsgálatát a felületekéhez hasonlóan végezzük. Ismét létezik kanonikus leképezés, a tétel formája (4.11)-hoz hasonló, a Kodaira dimenziót is ugyanúgy tudjuk definiálni. A 3-dimenziós varietásokra azonban az ismert tételek nem adnak olyan teljes leírást, mint a felületek esetében.

6.§ Epilógus

Emlékeztetni szeretném az olvasót, hogy ez az írás csupán ismeretterjesztő jellegű, és nem ajánlatos eredmények forrásaként használni. A definíciók és tételek nem a komoly kutatáshoz szükséges pontossággal és szigorral szerepelnek.

A témáról az olvasó egy részletes és sokkal pontosabb ismertetőt talál [Kollár87]-ben. Ez egy nehezebb olvasmány, de feltétlenül megéri a befektetett energiát.

A már említett magyar nyelvű irodalomban – [Kollár80], [Rónyai95] és [Szamuely96] – további referencia található bevezető jellegű írásokra. [Kollár87] irodalomjegyzéke bőséges további olvasnivalót ajánl az érdeklődőknek.

Néhányat én is megemlítenék: [Harris92] egy bevezető jellegű könyv sok érdekes példával fűszerezve. [Eisenbud-Harris92] és [Kempf93] könnyen olvasható bevezetést adnak az algebrai geometria modern nyelvezetébe. [Fulton69] és [Walker50] minimális előismeretet igénylő, az algebrai görbékről szóló könyvek. Az általános algebrai geometria iránt komolyan érdeklők számára további olvasnivalót kínál [Shafarevich88] és [Hartshorne77]. Ez utóbbi komolyabb kommutatív algebrai tudást feltételez, cserébe szigorú bevezetést ad a modern algebrai geometria felépítésébe. A szükséges kommutatív algebrai ismereteket tartalmazzák például [Eisenbud95] és [Atiyah-MacDonald69]. Végül, de nem utolsó sorban [Kollár95] és [Kollár96] a legmodernebb technikákról és kérdésekről adnak részletes leírást. Ez utóbbiak olvasása azonban már komoly előismereteket igényel.

Hadd idézzem ismét Kollár Jánost. [Kollár87]-ben olvashatjuk a következőt:

> „ ... M. Noether mondta egyszer, hogy az algebrai görbéket Isten teremtette, míg az algebrai felületeket az Ördög. Ez kevés helyet hagyott a 3-dimenziós algebrai varietások számára. ... ”

Jelen írás talán nem mutatja be teljes mértékben, miért mondta ezt M. Noether, azt azonban megfigyelhette az olvasó, hogy a felületek osztályozása nagyságrendekkel nehezebb feladat, mint a görbék osztályozása. Azt várnánk tehát, hogy a 3-dimenziós algebrai varietások osztályozása már szinte lehetetlen. A közelmúlt eredményei azonban, – ahogy ezt [Kollár87]-ben is olvashatjuk – mást mondanak. A minimális modell program – ami Mori elmélet néven is ismert – egy olyan megközelítését adja az osztályozási problémának, ami várhatóan eredményes lesz minden dimenzióban. Azt mondhatjuk tehát, hogy a korábban vártakkal ellentétben

> „ ... létezik egy mély és sokatmondó elmélet a 3-dimenziós algebrai varietások osztályozására, ami sok tekintetben emlékeztet a felületek osztályozásának elméletére. Minden ezen a területen dolgozó kutató közös reménye, hogy az eddig bizonyított eredmények csupán a kezdetét jelentik egy részletes struktúra elmélet kifejlődésének.”

Befejezésül azt remélem, hogy sikerült néhány olvasó érdeklődését olyan mértékben felkelteni, hogy ne érje be ezzel a szerény bepillantással, hanem tovább folytassa az algebrai geometria megismerését.

FÜGGELÉK

§A. Adalékok a nem definiált fogalmakhoz

dimenzió[6]**.** Varietások *kodimenzió*ját és *dimenzió*ját a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}(Y,X) &= \sup\{k \mid Y = Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Z_k, \text{ ahol} \\ &\qquad\qquad Z_i \subseteq X \text{ irreducibilis részvarietások}\} \\ \dim X &= \operatorname{codim}(\emptyset, X) \end{aligned}$$

divizor. Legyen X egy algebrai varietás. Jelölje $\operatorname{Div}(X)$ az X 1-kodimenziós irreducibilis részvarietásai által generált szabad Abel csoportot. $\operatorname{Div}(X)$ elemeit *divizor*oknak hívjuk.

[6] Az alaptest $\mathbb{C}$, a komplex számok teste, ezért a dimenzió is $\mathbb{C}$ felett értendő.

elliptikus és hiperelliptikus görbék. Legyen X egy görbe, amely biracionális az $y^2 = f(x)$ által definiált síkgörbével, ahol f többszörös gyök nélküli d-edfokú polinom. X-et *elliptikus*nak nevezzük, ha $d = 3$ vagy 4, és *hiperelliptikus*nak, ha $d \geq 5$.

Megjegyzések. (a) Egy elliptikus görbe *nem* hiperelliptikus.
(b) A $d \geq 4$ esetben az $y^2 = f(x)$ által definiált síkgörbének a végtelenben van egy szinguláris pontja.
(c) Valójában a $d = 4$ eset nem ad új elliptikus görbéket. Ezen görbék sima modelljei szerepelnek a $d = 3$ esetben.
(d) Egy sima projektív hiperelliptikus görbe nem ágyazható be $\mathbb{CP}^2$-be.

homogén polinom. Egy $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomot *d-edfokú homogén polinom*nak nevezünk, ha minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n).$$

Ez ekvivalens azzal, hogy az f-et alkotó összes monom foka d.

izomorfizmus. Egy $\phi : X \to Y$ morfizmust *izomorfizmus*nak nevezünk, ha létezik egy olyan $\psi : Y \to X$ morfizmus, hogy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ és $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_X$.

leképezés. Ha a vizsgált objektumok osztályát megszorítjuk – jelen esetben a polinomokkal definiált alakzatokra –, akkor a megengedett leképezéseket – *morfizmus*okat – is definiálni kell.

Egy $\phi : X \to Y$ affin varietások közötti leképezést *affin morfizmus*nak nevezünk, ha minden $f \in A(Y)$ reguláris függvényre*, $f \circ \phi$ reguláris X-en. Egy $\phi : X \to Y$ tetszőleges varietások közötti leképezést *morfizmus*nak nevezünk, ha affin részekre megszorítva affin morfizmust kapunk.

metszési szám. A szövegben közölt definíció nem pontos. Valójában így csak akkor tudjuk a metszési számot definiálni, ha D egy olyan divizor, ami az X egy alkalmas projektív térbe való beágyazásánál megegyezik X és egy hipersík metszetével. Igazolható azonban, hogy minden divizor előáll, mint két ilyen tulajdonságú divizor különbsége, tehát ezen a közvetett úton tudjuk a metszési számot általában definiálni.

Itt érdemes megjegyezni azt is, hogy miért fontos, hogy X sima legyen. Ellenkező esetben ugyanis előfordul, hogy nem minden divizor áll elő, mint két olyan divizor különbsége, melyek az X egy alkalmas projektív térbe való beágyazásánál megegyeznek X és egy hipersík metszetével.

Egy elegendő feltétel ahhoz, hogy metszési számot tudjunk értelmezni az, hogy minden divizornak egy alkalmas többszöröse előálljon a fenti módon.

reguláris és racionális függvények. Legyen $X \subseteq \mathbb{C}^n$ egy affin algebrai varietás. Jelölje

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x) = 0, \quad \forall x \in X\}.$$

Ekkor az

$$A(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\Big/ I(X)$$

gyűrűt az X *koordináta gyűrű*jének, a gyűrű elemeit pedig *reguláris függvény*eknek nevezzük. Az $A(X)$ hányadosteste, $K(X)$, az X *racionális függvényteste*, elemei a *racionális függvény*ek. Ha X egy tetszőleges algebrai varietás, akkor $K(X)$-et az X egy sűrű affin részvarietásának a racionális függvénytesteként definiáljuk.

sima. Legyen $x \in X$, és tekintsük x-nek egy $U \subseteq X$ affin környezetét. Legyenek $f_1, \dots, f_k$ az $U \subseteq \mathbb{C}^n$ affin varietást definiáló polinomok. Ekkor x egy *sima* pontja X-nek, ha

$$\operatorname{rk}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right] = n - \dim U.$$

Megjegyzés. Ekkor az implicit függvény tétel szerint x-nek van egy olyan környezete X-ben, amely egy differenciálható sokaság.

transzverzális metszés. Egy D hiperfelület és egy C görbe transzverzálisan metszik egymást, ha minden $P \in D \cap C$ sima pontja D-nek és C-nek, és D P-beli érintőtere nem tartalmazza C P-beli érintőterét.

§B. Útmutató a feladatok megoldásához

(1.3) $\overline{X} = \overline{X \setminus Z} \cup Z$ és $\overline{X}$ irreducibilis, tehát $\overline{X} = \overline{X \setminus Z}$, azaz $X \setminus Z$ irreducibilis.

(2.3) (2.2) alapján X vagy egy egyenes, ami nyilván izomorf $\mathbb{CP}^1$-gyel, vagy egy másodfokú görbe. Legyen tehát X egy másodfokú görbe. Egy görbe definíció szerint irreducibilis, tehát X nem tartalmazhat egyenest. Rögzítsünk egy $x_0 \in X$ pontot, és egy $x_0 \notin L \subseteq \mathbb{CP}^2$ egyenest. Tetszőleges $x \in X$-re legyen $\phi(x)$ az x és az x_0 által meghatározott egyenes (az x_0-beli érintő, ha $x = x_0$) és az L metszéspontja. Ez a ϕ egy izomorfizmus X és $L \simeq \mathbb{CP}^1$ között.

(2.4) Rajzoljunk egy gráfot X-re úgy, hogy a kivételes pontok a gráf csúcsai közé tartoznak. Emeljük fel ezt a gráfot Y-ra, azaz tekintsük az X-en megadott gráf ősképeként adódó, Y-on lévő gráfot. Ekkor az élek és lapok száma d-vel szorzódik, míg a csúcsok száma legfeljebb a d-szeresére nő. Azaz Euler tétele miatt

$$2 - 2g(Y) \leq d(2 - 2g(X)).$$

(2.5) Ha $g(X) = 0$, akkor az állítás nyilván igaz, hiszen $g(Y) \geq 0$ mindig teljesül. Ha $g(X) \geq 1$, akkor (2.4) alapján:

$$g(Y) \geq g(X) + (d-1)(g(X) - 1) \geq g(X).$$

(3.6) $R_1 \cdot R_2 = 1$, azaz ha lineárisan ekvivalensek lennének, akkor $R_1 \cdot R_1 = 1$ lenne, de láttuk, hogy valójában $R_1 \cdot R_1 = 0$.

(4.2) (a) Ha I generálható lenne két elemmel, akkor $\mathbb{C}[x,y,z]$ transzcendencia foka legfeljebb 2 volna.

(b) $X \cap Y \neq \emptyset$ azt jelenti, hogy az X-et illetve Y-t definiáló f illetve g polinomok eltünnek egy közös $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pontban, azaz

$$f, g \in (x-a, y-b, z-c) = \mathfrak{M}.$$

Az f és g által generált ideál (a) miatt nem tartalmazhatja $\mathfrak{M}$ egyetlen hatványát sem, tehát van egy $\mathfrak{M}$-től különböző maximális ideál, $\mathfrak{M}' = (x-a', y-b', z-c')$, ami tartalmazza f-et és g-t. Ez éppen azt jelenti, hogy $(a', b', c') \in X \cap Y$.

Valójában több is igaz: ha $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor $X \cap Y$ tartalmaz egy görbét.

(4.6) Legyen $z = [u : v] \in \mathbb{CP}^1$ és $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ olyan, hogy $\lambda_n \to 0$ és $x_n = (\lambda_n u, \lambda_n v) \in \mathbb{C}^2$. Ekkor $(x_n, \pi(x_n)) \to (0, z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, tehát $\mathbb{CP}^1 \subseteq C \subseteq p^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1$.

Irodalom

[Atiyah-Macdonald69] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 1969.

[Eisenbud95] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Eisenbud-Harris92] Eisenbud, D., Harris, J., *Schemes: the language of modern algebraic geometry*, Wadsworth & Brooks, 1992.

[Fulton69] Fulton, W., *Algebraic curves*, Mathematics Lecture Notes Series, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969; Addison-Wesley reprint, 1989.

[Harris92] Harris, J., *Algebraic geometry: a first course*, Graduate Texts in Math., vol. 133, Springer-Verlag, 1992.

[Hartshorne77] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[Kempf93] Kempf, G. R., *Algebraic varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 172, Cambridge University Press, 1993.

[Kollár80] Kollár J., *Algebrai görbék*, Matematikai Lapok **28** (1980), 153–198.

[Kollár87] Kollár, J., *The structure of algebraic threefolds – an introduction to Mori's program*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 211-273.

[Kollár95] Kollár, J., *Shafarevich Maps and Automorphic Forms*, Princeton Univ. Press, 1995.

[Kollár96] Kollár, J., *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer-Verlag, 1996.

[Lipman75] Lipman, J., *Introduction to resolution of singularities*, Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), pp. 187–230. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[Rónyai95] Rónyai L., *Elliptikus görbék és a Fermat-sejtés*, Matematikai Lapok (Új sorozat) **2**/3.–4. (1992), 1–22.

[Rotman88] Rotman, J., *An introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math., vol. 119, Springer-Verlag, 1988.

[Shafarevich88] Shafarevich, I., *Basic algebraic geometry 1-2*, Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid, Springer-Verlag, 1994.

[Szamuely96] Szamuely T., *A Riemann-Roch tételről*, Matematikai Lapok (Új sorozat) **3**/1.–2. (1996), 38–92.

[Walker50] Walker, R., *Algebraic curves*, Princeton University Press, 1950; Dover reprint, 1962; Springer-Verlag reprint, 1978.

Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Room 2-265
Cambridge, MA 02139, U.S.A.

E-mail: `kovacs@math.mit.edu`