Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen.

by Tietze, Heinrich

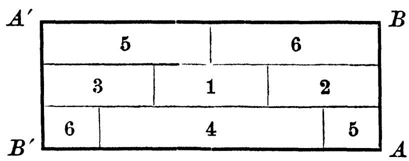
in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, (page(s) 155 - 159)
Leipzig, Stuttgart, Wiesbaden; 1892

Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen.

Von Heinrich Tietze in Wien.

Daß man auf einem Möbiusschen Blatt[1]) fünf Nachbargebiete (spatia confinia) konstruieren kann, d. h. fünf Gebiete, deren jedes an jedes andere längs mindestens eines Linienstückes grenzt, wurde von L. Heffter in seiner Abhandlung „Über das Problem der Nachbargebiete"[2]) mitgeteilt. Es möge hier zunächst gezeigt werden, daß man auf einem Möbiusschen Blatt sechs, aber auch nicht mehr Nachbargebiete zeichnen kann.

1. Wird die Kante AB des Rechteckes der Figur mit der Kante $A'B'$ (also dabei A mit A', B mit B') zur Deckung gebracht, so liefert die gezeichnete Gebietseinteilung ein Beispiel von sechs Nachbargebieten auf dem entstehenden Möbiusschen Blatt, wenn man in der Figur getrennt liegende, mit gleicher Nummer (z. B. 5) versehene Gebiete auf dem Blatte zu einem Gebiet vereinigt. Daher kann man auf jeder einseitigen Fläche[3]) mindestens sechs Nachbargebiete konstruieren,



1) Bericht. über d. Verhandl. d. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. Bd. 17 (1865) („Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", § 8) = Werke, Bd. 2, S. 482. Es scheint weniger bekannt zu sein, daß — wohl unabhängig von Möbius — J. B. Listing diese Fläche und ihre Eigentümlichkeit gekannt und vor Möbius veröffentlicht hat („Der Census räumlicher Complexe", Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, X (1861), S. 109, Anm. u. Fig. 3), obwohl bereits Stäckel, M. A. 52, auf die Priorität Listings hingewiesen (so auch Scheffers, Einf. in die Theorie der Flächen, S. 259) und gezeigt hat, daß diese Kenntnis bei Listing ebenso wie bei Möbius bis 1858 zurückreicht. [Die Zitate Stäckels und Scheffers bei der Korrektur beigefügt.]

2) Math. Ann. 38 (s. die Figur auf S. 480).

3) Der Ausdruck „einseitig" wird hier zur Bezeichnung einer absoluten Eigenschaft der Fläche, also als gleichbedeutend mit „mit umkehrbarer Indikatrix" verwendet. Mit Recht hebt E. Steinitz (Sitzungsber. d. Berlin. Math. Ges. 7 [Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 13]) unter Hinweis auf eine Bemerkung derselben Tendenz von W. v. Dyck hervor, daß die Bezeichnungen zweiseitig und einseitig in zwei wohl auseinander zu haltenden Bedeutungen gebraucht werden: einmal zur Bezeichnung einer Eigenschaft, die jede Fläche mit allen auf sie punktweise umkehrbar eindeutig und stetig abbildbaren Flächen gemein hat, das

da es auf jeder einseitigen Fläche Teilbereiche gibt, die ein Möbiussches Blatt darstellen.

2. Die einfache Übertragung einer von Heawood[1]) für zweiseitige Flächen angestellten Überlegung auf den Fall einseitiger Flächen zeigt nun, daß es auf dem Möbiusschen Blatt auch nicht mehr als sechs Nachbargebiete geben kann. Sei hierzu N der einer bestimmten Fläche $\mathfrak{F}$ zukommende, für alle Einteilungen von $\mathfrak{F}$ in Elementarflächen (einfach zusammenhängende Flächenstücke) sich gleich bleibende Wert des Eulerschen Ausdruckes $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ bzw. die Anzahl der Ecken, Kanten, Elementarflächen einer solchen Gebietseinteilung verstanden.[2]) Für eine beliebige auf $\mathfrak{F}$ gezeichnete Karte, d. h. für eine

---

andere Mal, um für eine in einer drei- (oder auch mehr-) dimensionalen Mannigfaltigkeit liegende Fläche eine Eigenschaft der Lage der Fläche in der Mannigfaltigkeit auszudrücken. Man findet bei Steinitz a. a. O. interessante Sätze über die gegenseitigen Beziehungen dieser beiden Eigenschaften (in ihrer Verallgemeinerung von Flächen auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionszahl). Im übrigen ist bisher nur die erstgenannte absolute Eigenschaft studiert und dabei in der Regel für sie die Bezeichnung „zweiseitig", bzw. „einseitig" gebraucht worden. Es bleibt abzuwarten, ob sich hierfür die etwas umständlichen Bezeichnungen „mit nicht umkehrbarer, bzw. mit umkehrbarer Indikatrix" einbürgern werden, oder ob Ausdrücke wie „absolut μ-seitig" und „relativ μ-seitig" oder „μ-seitig" und „μ-seitig liegend" ($\mu = 1, 2$) für die notwendig werdende Auseinanderhaltung der genannten zwei Bedeutungen ausreichen werden.

1) In der Abhandlung „map-colour theorem" (Quarterly Journal of mathematics, vol. 24, p. 332—338), die wohl die wesentlichsten der bisher erzielbaren Fortschritte in der Frage des Kartenfärbens gebracht hat. Man vergleiche noch die in mancher Hinsicht eine Vervollständigung bietenden Ergebnisse von Heffter a. a. O. sowie bezüglich weiterer Literaturangaben die Enc. d. math. Wiss. (III A B 3, Dehn-Heegaard, S. 177, 178).

2) Diese Zahl (die Bezeichnung N nach Poincaré, Journal de l'école polytechn., 2. sér., Cahier 1, p. 101) fällt — nicht der Definition, aber dem Werte nach — zusammen mit der negativ genommenen B. Riemannschen „Ordnung des Zusammenhangs" einer berandeten Fläche (Dissertation; Gesammelte Werke, S. 11) und mit W. Dycks Charakteristik K^{II} (Math. Ann. 32). Die Riemannsche Vielfachheit des Zusammenhangs (die „Grundzahl" C. Neumanns, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 1. Aufl. S. 299, 2. Aufl. S. 155), gewöhnlich Zusammenhangszahl genannt, ist gleich der um 2 vermehrten „Ordnung". In der Enc. d. math. Wiss. (III A B 3, Dehn-Heegaard, S. 195) wird $-N$ als Charakteristik K bezeichnet.

Bekanntlich ist

$$\text{(a)} \qquad N = 2 - r - 2p, \text{ bzw. } = 2 - r - q,$$

je nachdem $\mathfrak{F}$ zweiseitig oder einseitig ist, unter r die Anzahl der Randlinien verstanden, unter p das Geschlecht der zweiseitigen Fläche und unter q die größtmögliche Anzahl weder sich selbst noch einander schneidender Linien, auf denen beliebige Einteilung von $\mathfrak{F}$ in berandete[1]) Gebiete, die also nicht notwendig Elementarflächen sein müssen, gilt dann die Gleichung[2])

$$(1)\qquad e-k+\sum_{i=1}^{i=f} N_i = e-k+f+\sum_{i=1}^{i=f}(N_i-1)=N,$$

wenn e, k, f bzw. die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächenstücke bei dieser Einteilung und N_i der dem i^{ten} Flächenstück zukommende Wert von N ist. Bedeutet ferner k_h die Anzahl der Kantenenden, die in der h^{ten} Ecke zusammenstoßen, so ergibt sich vermöge

$$2k=\sum_{h=1}^{h=e} k_h$$

aus (1) die Relation

$$(2)\qquad k=3\left[f-N+\sum_{i=1}^{i=f}(N_i-1)\right]-\sum_{h=1}^{h=e}(k_h-3).$$

Beachtet man, daß für alle Teilgebiete, seien sie zwei- oder einseitig, $N_i \leqq 1$ ist[3]), und nimmt man an, was für die folgenden Betrachtungen ausreicht, daß alle $k_h \geqq 3$ sind, so folgt

$$(3)\qquad A_f=\frac{2k}{f}\leqq 6\left(1-\frac{N}{f}\right),$$

wobei A_f die mittlere Anzahl von Kanten ist, die ein einzelnes Flächenstück aufweist. Für den einfachsten Typus geschlossener einseitiger Flächen, wie er z. B. durch die projektive Ebene repräsentiert wird, ist $N=1$[4]), also $A_f<6$. Sonach gibt es bei jeder Gebietseinteilung einer solchen Fläche mindestens ein Gebiet, das höchstens an 5 andere

---

sich die Indikatrix der Fläche umkehrt. Späterhin möge, um einen kurzen Ausdruck zu haben, eine einseitige Fläche mit q solchen Linien als *q-fach einseitig* bezeichnet werden.

1) Der Zusatz „berandet" schließt es nur aus, wenn $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche ist, $\mathfrak{F}$ selbst als einziges Teilgebiet anzusehen.

2) Vgl. bezüglich polyedrischer Flächen Lhuilier, Mémoire sur la polyédrométrie Nr. 14, Annales de mathématiques (réd. par Gergonne) t. 3; bezüglich allgemeinerer Fälle J. B. Listing (a. a. O. Art. 37, 38) und die Bemerkungen Listings über Lhuiliers Abhandlung (Göttinger Nachr., 1867, S. 438ff.). Weitere Literatur Enc. III A B 3, Anm. 99.

3) Vgl. die Formel (a) in der auf die Zahl N bezügl. Anm. Für jedes Teilgebiet ist $r\geqq 1$.

4) Man setze in Formel (a) $q=1$, $r=0$.

Gebiete angrenzt. Daraus folgt durch einen einfachen Induktionsschluß [1]), daß für *jede* Karte auf der Fläche 6 Farben sicher hinreichen, um jedem der Gebiete eine dieser Farben so zu geben, daß keine 2 Gebiete, die längs einer oder mehrerer Kanten aneinander stoßen, dieselbe Farbe aufweisen.

Nun kann allgemein die kleinste Anzahl c von Farben, die hinreicht, um jede Karte auf einer bestimmten Fläche in der genannten Weise zu färben [2]), niemals kleiner sein als die größtmögliche Anzahl v von Nachbargebieten auf der Fläche. [3]) Daraus ergibt sich für jede einseitige Fläche, die als Teilgebiet der von uns betrachteten geschlossenen einseitigen Fläche angesehen werden kann, sowie für diese Fläche selbst [4]) die Gleichung:

$$c = v = 6.$$

Speziell können also *sowohl auf der projektiven Ebene als auf dem Möbiusschen Blatt auf allen Karten die Gebiete durch 6 Farben unterschieden* und daher *nicht mehr als 6 Nachbargebiete gezeichnet werden.*

3. Für die geschlossene 2fach-einseitige [5]) Fläche ist $N = 0$, $A_f \leqq 6$, woraus $c \leqq 7$ folgt, während anderseits, wie für jede einseitige Fläche $v \geqq 6$ ist. Ob es auf dieser Fläche Karten gibt, deren Färbung wirklich 7 Farben benötigt, ob es insbesondere auf ihr 7 Nachbargebiete gibt, bleibe dahingestellt. Jedenfalls müßten 7 solche Nachbargebiete, sofern sie die ganze geschlossene Fläche ausfüllen, sämtlich Elementarflächen sein, wie man aus (2) unter der zulässigen Annahme $k_h \geqq 3$ vermöge $k \geqq \frac{7 \cdot 6}{2}$ — oder durch Überlegungen analog den von Heffter (a. a. O. § 2, Nr. 7) angestellten folgert.

Wenn $q > 2$ ist, so ist für eine geschlossene q-fach einseitige Fläche

---

1) S. Heawood, l. c., S. 333, 334.

2) Diese Anzahl ist auch als die chromatische Zahl der Fläche bezeichnet worden (P. Wernicke, Math. Ann. 58).

3) Für alle Flächen, für die bisher beide Zahlen c, v ermittelt werden konnten, — es sind das die zweiseitigen Flächen vom Geschlecht $p = 1, 2, ..$ bis 6 und von gewissen speziellen größeren Werten p des Geschlechts (vgl. Heffter, a.a.O., § 3 und § 5, Nr. 21) — ist genau $c = v$. Von den Flächen $p = 0$ weiß man bekanntlich derzeit nur, daß $v = 4$ (Möbius) und $c \leqq 5$. Sei noch beigefügt, daß durch die Untersuchungen von Heffter die behandelten Fragen auch für die zweiseitigen Flächen vom Geschlecht $p = 7$ miterledigt sind, da für sie nach Heawood $c \leqq 12$ ausfällt, anderseits aber auf den Flächen $p = 6$ und daher auch auf den Flächen $p = 7$ sicher 12 Nachbargebiete existieren, so daß sich $c = v = 12$ ergibt.

4) Das heißt also in der Ausdrucksweise, die in der zweiten Anmerkung dieser Nummer eingeführt wurde: für alle einfach-einseitigen Flächen.

5) Vgl. Nr. 2, zweite Anmerkung.

$N < 0$. Dann ergibt sich aus (3), wie **Heawood** gezeigt hat[1]), für c, und damit auch für v die obere Schranke[2])

$$v \leqq c \leqq E\left(\frac{7+\sqrt{49-24N}}{2}\right) = E\left(\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right),$$

wobei $E(x)$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet.

4. Über die in Nr. 1 und 2 besprochenen Tatsachen habe ich schon vor einigen Jahren gelegentlich eines Vortrages[3]) berichtet und damals auch durch ein Modell aus farbigen Stoffstücken die 6 Nachbargebiete auf dem **Möbius**schen Blatt veranschaulicht. Inzwischen habe ich nun bemerkt, daß das Vorhandensein von 6 Nachbargebieten auf den einfach-einseitigen Flächen implizite schon in dem allerersten der von **Möbius** (a. a. O.) mitgeteilten Beispiele einseitiger Flächen enthalten ist. Es ist das eine Polyederfläche[4]), die, entsprechend metrisch spezialisiert, folgendermaßen erhalten werden kann.

Seien A, B, C, D, E die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(0, 0, 1)$ und sei F irgendein Punkt, der mit keinem der 5 Dreiecke (d) (s. unten) in einer Ebene liegt. Das genannte Polyeder besteht dann aus den 10 Dreiecken:

$$(d)\quad ABC,\ BCD,\ CDE,\ DEA,\ EAB,$$
$$(d')\quad FAC,\ FBD,\ FCE,\ FDA,\ FEB.$$

Es ist eine geschlossene, einfach-einseitige Fläche also vom selben Typus wie die projektive Ebene. Jede der 6 Ecken ist mit jeder anderen durch eine auf der Fläche verlaufende Kante verbunden. Beim Übergang zur reziproken (dualen) Figur[5]) auf der Fläche erhält man an Stelle der Ecken 6 Gebiete, deren jedes an jedes andere längs einer Kante der Gebietseinteilung grenzt, d. h. also 6 Nachbargebiete.

Wien, im Dezember 1909.

1) Mit den diesbezüglichen Überlegungen **Heawoods** fallen im wesentlichen zusammen die von **Heffter** (a. a. O. § 2) angestellten zur Ermittlung einer unteren Schranke $[=\frac{1}{12}(v-3)(v-4)]$ für das Geschlecht p einer zweiseitigen Fläche, auf der v Nachbargebiete möglich sind. Man erhält diese untere Schranke einfach durch Auflösung nach p der angegebenen Ungleichung zwischen v und $N = 2 - 2p$.

2) Diese Schranke wird in allen Fällen (auch in solchen, in denen $N \geqq 0$ ist, auf die sich also die Ableitung der angegebenen Ungleichung nicht bezieht), für die c oder v bisher festgestellt worden sind, von diesen Zahlen erreicht.

3) Sitzung d. Math. Ges. in Wien am 10. Febr. 1905 (vgl. diese Jahresber. 14, S. 202).

4) Dieses Polyeder erwähnt neuerdings F. **Klein** (Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus, autogr. Vorlesung, II, Sommer-Semester 1908, S. 39); daselbst auch eine Figur.

5) Vgl. **Heffter**, a. a. O., Einleitung und § 2, Nr. 6. — Die reziproken Figuren spielen bekanntlich in **Poincarés** Untersuchungen über Analysis situs eine wichtige Rolle.